Μάθημα 4ο 26/09/16

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1: $(3\mathbb{Z}, +)$ ομάδα

$3\mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$

Πρέπει να είναι καλά ορισμένη η πράξη: $3a + 3\beta = 3(a+\beta)$, $a, \beta \in \mathbb{Z}$

$3(a+\beta) \in 3\mathbb{Z}$

Προσεταιριστική $(3a+3\beta)+3\gamma = 3a + (3\beta + 3\gamma)$

Το $(\mathbb{Z}, +)$ ομάδα $\rightarrow$ προσεταιριστική

$3\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$

Ουδέτερο στοιχείο 0, $3a + 0 = 0 + 3a = 3a$

Αντίθετος του $3a$ είναι $-3a$: $3a + (-3a) = (3 + (-3))a = 0 \cdot a = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a, \beta) \square (\gamma, \delta) = (a+\gamma, \beta - \delta)$

Πράξη καλά ορισμένη.

$a+\gamma, \beta - \delta \in \mathbb{R}$.

Προσεταιριστική: $[(\alpha,\beta)\square(\gamma,\delta)]\square(\varepsilon,\zeta) = (\alpha+\gamma, \beta-\delta)\square(\varepsilon,\zeta) =$
$= ((\alpha+\gamma)+\varepsilon, (\beta-\delta)-\zeta) = (\alpha+(\gamma+\varepsilon), \beta-\delta-\zeta)$

$\neq$

$(\alpha,\beta)\square[(\gamma,\delta)\square(\varepsilon,\zeta)] = (\alpha,\beta)\square(\gamma+\varepsilon, \delta-\zeta) =$
$= (\alpha+(\gamma+\varepsilon), \beta-(\delta-\zeta)) = (\alpha+(\gamma+\varepsilon), \beta-\delta+\zeta)$

ΑΣΚΗΣΗ 3: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$: $(x,y)\square(z,w) = (x+z, yw)$
Πράξη καλά ορισμένη: $x+z\in\mathbb{R}$ και $yw\in\mathbb{R}^*$
Προσεταιριστική: $[(x,y)\square(z,w)]\square(r,s) = (x+z, yw)\square(r,s) =$
$= (x+z+r, yws) = (x,y)\square[(z,w)\square(r,s)]$

Ουδέτερο: Έστω (r,s) ουδέτερο. Πρέπει: $(x,y)\square(r,s) = (x,y) =$
$(r,s)\square(x,y)$
$\hookrightarrow (x+r, ys) = (x,y) \Rightarrow$
$x+r = x$ και $ys = y \Rightarrow$
$r=0$ και $s=1$.
$(0,1)$

Αντίθετος-αντίστροφος: $(x,y)^{-1}$ είναι $\left(-x, \frac{1}{y}\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η $(G,\square)$ είναι αβελιανή ομάδα ανν $(x\square y)^{-1} = x^{-1}\square y^{-1}$ $(*)$, $\forall x,y\in G$
Αβελιανή $\Leftrightarrow x\square y = y\square x$
Αβελιανή: $(x\square y)^{-1} = y^{-1}\square x^{-1} = x^{-1}\square y^{-1}$

$(*)$ $(x\square y)^{-1} = y^{-1}\square x^{-1} = x^{-1}\square y^{-1}$
$(\beta^{-1})^{-1}\square(\alpha^{-1})^{-1} = (\alpha^{-1})^{-1}\square(\beta^{-1})^{-1} \Rightarrow \beta\square\alpha = \alpha\square\beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $(O,\square)$ ομάδα με $\alpha^2 = 1_O$, $\forall\alpha\in O$, τότε είναι Αβελιανή.
$\alpha^2 = 1_O \Leftrightarrow \alpha\square\alpha = 1_O \Leftrightarrow \alpha^{-1} = \alpha$
Θέλουμε αβελιανή
$(\alpha\square\beta)^{-1} = \beta^{-1}\square\alpha^{-1} = \beta\square\alpha$
$(\alpha\square\beta)^{-1} = \alpha\square\beta$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $(O, \square)$ ομάδα και $a \in O$ τότε $a \square O = O$

$\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}. \oplus$

$[1] \oplus \mathbb{Z}_4 = \{[1]\oplus[0], [1]\oplus[1], [1]\oplus[2], [1]\oplus[3]\}$
$\qquad\quad \| \qquad\qquad [1] \qquad\quad [2] \qquad\quad [3] \qquad\quad [0].$
$\quad \mathbb{Z}_4$

$(\mathbb{Z}_5^*, \odot) = \{1, 2, 3, 4\}.$

$3 \odot \mathbb{Z}_5^* = \{3, 1, 4, 2\} = \mathbb{Z}_5^*$

$a \square O = \{a \square b \mid b \in O\} \subseteq O$

Θέλουμε $O \subseteq a \square O$

$b \in O$ τυχαίο, γράφω: $b = a \square (a^{-1} \square b) = (a \square a^{-1}) \square b.$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1_O \square b = b.$

$O \subseteq a \square O$

$O = a \square O.$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: $(O, \cdot)$ ομάδα

1) $(a^k)^\lambda = a^{k\lambda} = (a^\lambda)^k \quad, k, \lambda \in \mathbb{Z}$

2) $(a^{-1})^k = a^{-k} = (a^k)^{-1} \quad, k \in \mathbb{Z}$

3) $a^k \cdot a^\lambda = a^{k+\lambda} = a^\lambda a^k \quad, k, \lambda \in \mathbb{Z}$

$(O, \cdot)$ ομάδα

μοναδιαίο - μονάδα - ουδέτερο.

$1_O = e = 0_O.$

$a \in O$, $O(a)$ τάξη του $a = n$

n φυσικός, ο μικρότερος ώστε $(a \cdots a) = a^n = 1_O = e.$

Αν υπάρχει το $n \Rightarrow O(a) = n < \infty$

Αν δεν υπάρχει $\Rightarrow O(a) = \infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(O, \cdot) \Rightarrow o(1_O) = 1$.
$1_O^1 = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $GL(2,\mathbb{R})$, $O\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$O\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \infty$

$(\mathbb{Z}_4, \oplus)$, $O(1) = 4 = O(3)$, $O(2) = 2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(O, \cdot)$ ομάδα
1) $O(a) = O(a^{-1})$
2) Αν $a^n = 1_O \Leftrightarrow O(a) | n$
3) Αν $O(a) = n$, τότε $O(a^m) = \dfrac{n}{(n,m)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
1) Υποθέτουμε ότι $O(a) = n \Leftrightarrow a^n = 1_O$, n μικρότερος
$(a^n)^{-1} = (1_O)^{-1} \Rightarrow (a^{-1})^n = 1_O \Rightarrow O(a^{-1}) \leq n = O(a)$.
Υποθέτουμε ότι $O(a^{-1}) = \ell < n$
$(a^{-1})^\ell = 1_O \Rightarrow ((a^{-1})^\ell)^{-1} = 1_O^{-1} = 1_O \Rightarrow$
$a^\ell = 1_O$ με $\ell < n$!!!
Άρα, $O(a) = \infty \Rightarrow O(a^{-1}) = \infty$
$O(a^{-1}) = n < \infty \Rightarrow (a^{-1})^n = 1_O \Rightarrow ((a^{-1})^n)^{-1} = 1_O \Rightarrow a^n = 1_O$!!!, $O(a) = \infty$

2) Έστω $O(a) = \ell$ και $a^n = 1_O$
Θέλουμε ότι $\ell | n$
Έστω ότι $\ell \nmid n$. Επίσης $\ell \lneq n$.
Διαιρούμε το n με το ℓ
$n = \pi\ell + \upsilon$ με $0 < \upsilon < \ell$
$a^n = 1_O \Rightarrow a^{\pi\ell + \upsilon} = 1_O \Rightarrow a^{\pi\ell} a^\upsilon = 1_O \Rightarrow$

$(a^{\ell})^{\pi} \cdot a^{\upsilon} = 1_0 \Rightarrow (1_0)^{\pi} \cdot a^{\upsilon} = 1_0 \Rightarrow a^{\upsilon} = 1_0$ με $\upsilon < \ell$!!!
Άρα, $\ell | n$

3) $O(a) = n$, $(n,m) = $ Μ.Κ.Δ (n,m).

$n = (n,m) \cdot n'$ $m = (n,m) \cdot m'$	$(n', m') = 1$ πρώτοι μεταξύ τους.

Έστω $O(a^m) = \ell$.

$(a^m)^{\frac{n}{(n,m)}} = (a^m)^{n'} = a^{(n,m)m'n'} = (a^n)^{m'} = 1_0^{m'} = 1_0$

Άρα, $n' | \ell$.
Θέλουμε $\ell | n'$
$a^n = 1_0 \Rightarrow a^{(n,m)n'} = 1_0$
$(n,m)m' = m \Rightarrow (n,m) = \frac{m}{m'}$

$a^{\frac{m}{m'} \cdot n'} = 1_0$

$(a^m)^{\frac{n'}{m'}}$ $\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: Στην $\mathbb{Z}_{30}$ να βρεθούν οι τάξεις των 3, 4, 6, 7, 18.

$O(1) = 30$.
$3 = 1+1+1 = 3 \cdot 1 \Rightarrow O(3 \cdot 1) = \frac{O(1)}{(3, O(1))} = \frac{30}{(3,30)} = \frac{30}{3} = 10$.

$O(4) = \frac{30}{(4, O(1))} = \frac{30}{(4,30)} = \frac{30}{2} = 15$.

$O(6) = \frac{30}{(6,30)} = \frac{30}{6} = 5$.

$O(7) = \frac{30}{(7,30)} = \frac{30}{1} = 30 = O(1).$

$\mathbb{Z}_{30} = \langle 1 \rangle = \langle 7 \rangle$
κυκλική

Πόσους γεννήτορες έχει;
$\phi(30) = \phi(2 \cdot 3 \cdot 5) = \phi(2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$

$O(18) =$; ΑΣΚΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε τα στοιχεία τάξης 15 στην $\mathbb{Z}_{45}$
$O(a) = 15$
$O(a \cdot 1) = \frac{O(1)}{(a, O(1))} = \frac{45}{(a,45)} = 15 \Rightarrow (a,45) = 3 \Rightarrow 3|a = 3\kappa = 3 \cdot \cancel{5} \cdot \kappa$
$3 \nmid 15 \Rightarrow (a = 15, 45) = \cancel{15}\ 3$

$(3 \cdot 5 \cdot \kappa, 45) = (3 \cdot 5 \cdot \kappa, 3^2 \cdot 5) = \cancel{15}$

Αν ο κ ήταν πολλαπλάσιο του 3 ή 5, τότε $(3\kappa, 3^2 \cdot 5)$ θα ήταν 9 ή 15 ή 45.
Θέλουμε να είναι 3.
Άρα το $(\kappa, 3) = 1$, $(\kappa, 5) = 1$.
Βρείτε το $a = \ldots$ ΑΣΚΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να δείξουμε ότι $O(x) = O(yxy^{-1})$

$O(x) = n \Rightarrow (yxy^{-1})^n = \underbrace{(yx\cancel{y^{-1}}) \cdot (\cancel{y}x\cancel{y^{-1}}) \cdots (\cancel{y}xy^{-1})}_{n-\text{φορές}} =$

$= yx^n y^{-1} = y 1_0 y^{-1} = 1_0 \Rightarrow$

$O(yxy^{-1}) | n$

Θέλουμε $n | \underbrace{O(yxy^{-1}) = \ell}_{\otimes} \Leftrightarrow x^\ell = 1_0$

$(yxy^{-1})^\ell = 1_0 \Rightarrow yx^\ell y^{-1} = 1_0 \Rightarrow y^{-1}yx^\ell y^{-1}y = y^{-1}1_0 y \Rightarrow x^\ell = 1_0 \Rightarrow n | \ell.$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω G κυκλική, $G=\langle x\rangle$, αν $o(x)=\infty=|G|$, τότε $x^k\neq x^l$ με $k\neq l$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν για $k\neq l$ είχαμε $x^k=x^l \Rightarrow x^{k-l}=1_G$.
Άρα, $o(x)\mid k-l<\infty$ Αδύνατο.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $G=\langle x\rangle$, $|G|=n<\infty$ τότε υπάρχουν φυσικοί $k\neq l$ με
$x^k=x^l$

Π.Χ. $x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n=1_G$.
$x^{n+1}=x^n\cdot x=1_G\cdot x=x$
$x^{2n+1}=x$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κυκλική $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ αβελιανή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $G=\langle x\rangle \rightarrow \forall a\in G$ θα έχει μορφή $a=x^k$ για κάποιο φυσικό k.
Άρα, $a\cdot b=x^k\cdot x^l=x^{k+l}=x^{l+k}=b\cdot a$.

Π.Χ. $(\mathbb{Q},+)$ αβελιανή αλλά όχι κυκλική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:
1) Έστω $G=\langle x\rangle$ με $o(x)=24$. Να βρεθούν όλα τα στοιχεία τάξης 4.
2) Έστω $G=\{1,2,3,4,5,6\}$ με πράξη $a\odot b=\gamma$ ώστε $ab-\gamma$ διαιρείται με το 7.
Δείξτε ότι $(G,\odot)$ ομάδα. Είναι κυκλική;
3) Στο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε την πράξη $a\odot b=a+b-1$.
Το $(\mathbb{Z},\odot)$ είναι ομάδα. Είναι κυκλική;

$(\mathbb{Z},+)\subseteq(\mathbb{Q},+)\subseteq(\mathbb{R},+)\subseteq(\mathbb{C},+)$

$\mathbb{R}^* \overset{\text{όχι ομάδα}}{\subseteq} \mathbb{R}$ $\quad(\mathbb{R},+)$ αβελιανή
$\mathbb{R}^*$ αβελιανή ομάδα (με τον πολ/σμο).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω (O,θ) ομάδα και $Y \subset$. Αν το (Y,θ) αποτελεί ομάδα, θα λέγεται υποομάδα της O $Y \leq O$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $GL(2,\mathbb{R})$

$$U(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \middle| \, a\gamma \neq 0 \right\}$$

$U(2,\mathbb{R}) \leq GL(2,\mathbb{R})$

Για να δείξουμε ότι είναι υποομάδα πρέπει να δείξουμε

1) Η πράξη είναι καλά ορισμένη
2) Προσεταιριστική
3) Μοναδιαίο
4) Αντίστροφος.

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & \beta' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' & a\beta' + \beta\gamma' \\ 0 & \gamma\gamma' \end{pmatrix}.$$

Επειδή $aa'\gamma\gamma' \neq 0$, αφού $a\gamma \neq 0$ και $a'\gamma' \neq 0$.

Το στοιχείο αυτό είναι στο $U(2,\mathbb{R})$ Άρα, η πράξη είναι καλά ορισμένη.

Η προσεταιριστική ισχύει από το μεγάλο σύνολο $GL(2,\mathbb{R})$

Μοναδιαίος $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2,\mathbb{R})$

Αντίστροφος είναι στοιχείο του $U(2,\mathbb{R})$;;;

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το υποσύνολο Y της ομάδας (O,θ) θα είναι υποομάδα της αν

1) $Y \neq \emptyset$
2) η πράξη είναι καλά ορισμένη
3) $\forall a \in Y$ έχουμε και $a^{-1} \in Y$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

"$\Rightarrow$") Αν $Y \leq O$, τότε τα ζητούμενα ικανοποιούνται

"$\Leftarrow$") Αν ισχύουν 1), 2), 3). το Y αποτελεί ομάδα

$\exists a \in Y$ (1), (3) $a^{-1} \in Y$ (2) $a \cdot a^{-1} = 1_O \in Y$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί και την προσεταιριστική.

$(a\theta\beta)\theta\gamma = a\theta(\beta\theta\gamma)$ ισχύει από την O